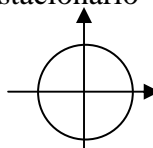


1º Parcial – Análisis Matemático III C (61.13)

- 1) Calcular la temperatura en el punto (0;0) del siguiente sólido en estado estacionario

si, en coordenadas polares, la temperatura es: $T(\alpha, 1) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq \alpha < \pi/2 \\ 4 & \text{si } \pi/2 \leq \alpha < \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq \alpha < 2\pi \end{cases}$



2) Calcular: $\oint_{|z|=2} \frac{z+1}{z(e^z-1)} dz$.

3) Considere la siguiente integral: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^n (x^2+1)^2} dx$.

- a) Analizar para qué valores de n entero converge.
b) Calcular cuánto vale para esos valores de n .

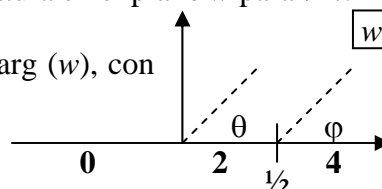
Resolución 1º Parcial

1) Transformaciones conformes:

$$z_1 = z + 1 \quad z_2 = 1/z_1 \quad z_3 = z_2 - 1/2 \quad w = i z_3 \quad \Rightarrow w = \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \right) i$$

$w(0,0) = 1/2 i$, es decir, necesito la solución de la temperatura en el plano w para $1/2 i$.

Propongo función holomorfa: $A \ln w = A \ln |w| + A i \arg(w)$, con $0 \leq \arg(z) < 2\pi$.



$\Rightarrow A \arg(w)$ es holomorfa en la zona buscada.

Veo que $w(1,0) = 0$, $w(-1,0) = \infty$, $w(0,1) = 1/2$.

Si $0 \leq \alpha < \pi/2$, entonces $T(u,0) = A \arg_1(u) + B \arg_2(u) + C = C = 4$

Si $\pi/2 \leq \alpha < \pi$, entonces $T(u,0) = A \arg_1(u) + B \arg_2(u) + 4 = B \pi + 4 = 2$

$\Rightarrow B = -2/\pi$

Si $\pi \leq \alpha < 2\pi$, entonces $T(u,0) = A \arg_1(u) + 2 = A \pi + 2 = 0$

$\Rightarrow A = -2/\pi$

$$\text{Además, } \arg(w) = \arctg\left(\frac{v-v_0}{u-u_0}\right)$$

Por coincidir sobre la recta real y ser holomorfa, ésta es la función pedida para todo

$$\text{punto de } w: T(u,v) = -2/\pi \arctg\left(\frac{v}{u}\right) - 2/\pi \arctg\left(\frac{v}{u-1/2}\right) + 4$$

$$\text{Entonces, en particular, } T(0, 1/2) = -2/\pi \arctg\left(\frac{1/2}{0}\right) - 2/\pi \arctg\left(\frac{1/2}{0-1/2}\right) + 4 =$$

$$= -2/\pi \arg_1(1/2 i) - 2/\pi \arg_2(1/2 i) + 4 = -2/\pi \cdot \pi/2 - 2/\pi \cdot 7/4 \pi + 4$$

$$\boxed{T(0,0) = 3/2}$$

2) La función tiene una singularidad aislada en $z = 0$.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z+1}{z(e^z - 1)} = \infty \Rightarrow \text{Polo}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z+1}{z(e^z - 1)} \cdot z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z+1}{e^z - 1} = \infty \quad \text{No es de primer orden.}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z+1}{z(e^z - 1)} z^2 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z+1)z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z+z+1}{e^z} = 1 \Rightarrow \text{Polo de segundo orden.}$$

$$\Rightarrow \text{Si } f(z) = \frac{z+1}{z(e^z - 1)}, \quad R_{z=0}[f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (f(z) \cdot z^2) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z+1)z}{e^z - 1} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z+z+1)(e^z-1) - (z+1)ze^z}{(e^z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2(e^z-1) + (2z+1)e^z - (2z+1)e^z - (z^2+z)e^z}{2(e^z-1)e^z}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2e^z - (2z+1)e^z - (z^2+z)e^z}{2(e^ze^z + (e^z-1)e^z)} = \frac{1}{2}.$$

Por el teorema de los residuos, $\oint_{|z|=2} \frac{z+1}{z(e^z-1)} dz = 2\pi i R_{z=0} \left[\frac{z+1}{z(e^z-1)} \right] = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$

3)

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^n(x^2+1)^2} dx \Rightarrow \left| \frac{\sin(2x)}{x^n(x^2+1)^2} \right| \leq \frac{1}{|x^n(x^2+1)^2|} = \frac{1}{|x^{4+n}(1+\frac{1}{x^2})^2|}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^{4+n}(1+\frac{1}{x^2})^2}}{\frac{1}{x^{4+n}}} = 1 \text{ CV} \Leftrightarrow 4+n > 1 \therefore n > -3 \text{ en } V(\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^n(x^2+1)^2}}{\frac{1}{x^n}} = 1 \text{ CV} \Leftrightarrow n < 1$$

$$\therefore n \in (-3, 1), \quad n \in \mathbb{N}$$

CV $n = -2, -1, 0$

b) Camino por semiplano superior, calculo en vez de la pedida:

$$\oint \frac{e^{i2z}}{z^n(z^2+1)^2} dz = \int_r^R \frac{e^{i2x}}{x^n(x^2+1)^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i2z}}{z^n(z^2+1)^2} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i2x}}{x^n(x^2+1)^2} dx + \dots$$

$$\dots + \int_{\gamma_r} \frac{e^{i2z}}{z^n(z^2+1)^2} dz = 2\pi i R_{z=i} \left[\frac{e^{i2z}}{z^n(z^2+1)^2} \right]$$

Por T. de Jordan, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i2z}}{z^n(z^2+1)^2} dz = 0$ pues $2 > 0$, y

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n(z^2+1)^2} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^{n+4}(1+\frac{1}{z^2})} = 0 \text{ si } n+4 > 0, \text{ o sea, } n > -4.$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{i2z}}{z^n(z^2+1)^2} dz = 0 \text{ por el T. de Mayoración, pues } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^{i2z}}{z^n(z^2+1)^2} = 0 \text{ si}$$

$$n-1 < 0, \text{ o sea, } n < 1.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x^n (x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i R_{z=i} \left[\frac{e^{i2z}}{z^n (z^2 + 1)^2} \right]$$

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)e^{i2z}}{z^n (z-i)^2 (z+i)^2} = \infty \quad \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)^2 e^{i2z}}{z^n (z-i)^2 (z+i)^2} = \frac{e^{-2}}{-4i^n} \neq 0 \Rightarrow \text{Polo } 2^\circ \text{ orden}$$

$$\begin{aligned} R_{z=i} \left[\frac{e^{i2z}}{z^n (z^2 + 1)^2} \right] &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-i)^2 e^{i2z}}{z^n (z-i)^2 (z+i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{i2z}}{z^n (z+i)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{2ie^{i2z} (z+i)^2 z^n - e^{i2z} [2(z+i)z^n + (z+i)^2 n z^{n-1}]}{(z+i)^4 z^{2n}} = \\ &= \frac{2ie^{-2} (2i)^2 i^n - e^{-2} (4i i^n + (2i)^2 n i^{n-1})}{(2i)^4 i^{2n}} = \frac{2ie^{-2} (-4)i^n - e^{-2} (4i^{n+1} - 4n \frac{i^n}{i})}{16i^{2n}} = \\ &= \frac{-8i^{n+1} e^{-2} - e^{-2} (4i^{n+1} + 4ni^{n+1})}{16i^{2n}} = \frac{i^{n+1} (-8e^{-2} - 4e^{-2} - 4ne^{-2})}{16i^{2n}} = \frac{(-i)^n i 4e^{-2} (-3-n)}{16} \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x^n (x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i \frac{(-i)^n i e^{-2} (-1)(3+n)}{4} = \frac{\pi}{2} e^{-2} (3+n) e^{-i\pi/2 n} \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x^n (x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-2} (3+n) e^{-i\pi/2 n} \text{ para } n = -2, -1, 0$$

$$\text{Ahora, } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x^n (x^2 + 1)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^n (x^2 + 1)^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sen(2x)}{x^n (x^2 + 1)^2} dx = A + iB$$

O sea:

n	$A + iB$	Resultado
-2	$-\frac{\pi}{2} e^{-2}$	0
-1	$\pi e^{-2} i$	πe^{-2}
0	$\frac{3}{2} \pi e^{-2}$	0